

О.В Мокрицька¹, Я.Ю Заячук²

¹Кафедра систем автоматизованого проектування, Національний університет «Львівська політехніка», Україна, Львів, вул. С. Бандери 12, <https://orcid.org/0000-0002-2887-9585>
olha.v.mokrytska@lpnu.ua;

²Кафедра інженерії програмного забезпечення, Національний лісотехнічний університет, Україна, Львів, вул.Генерала Чупринки, 103, <https://orcid.org/0009-0003-8700-7773> yarema.zayachuk@nltu.edu.ua.

АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ В БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУРАХ

Анотація. У цій роботі представлено аналітичний підхід до розв'язку задачі теплопередачі в багатошарових структурах з фіксованими граничними умовами. Метою дослідження є аналіз процесів теплопередачі у системах з різними теплотехнічними характеристиками та розробка методів для визначення точного температурного розподілу в кожному шарі. Застосовуючи рівняння теплопровідності, для кожного шару аналітично розв'язуються відповідні рівняння з урахуванням безперервності температури та теплового потоку на межах між шарами. Особлива увага приділяється стаціонарним та нестаціонарним процесам. Результати дослідження можуть бути застосовані для оптимізації багатошарових конструкцій у будівництві, енергетиці та інших галузях, де важливо забезпечити ефективну теплову ізоляцію або розподіл тепла. Аналітичний підхід забезпечує точне моделювання температурних полів у складних системах та дозволяє прогнозувати вплив граничних умов на теплопередачу в багатошарових матеріалах.

Ключові слова: теплопередача, багатошарові структури, аналітичний розв'язок, граничні умови.

ANALYTICAL APPROACH TO SOLVING THE PROBLEM OF HEAT TRANSFER IN MULTILAYER STRUCTURES

Abstract. This work presents an analytical approach to solving the problem of heat transfer in multilayer structures with fixed boundary conditions. The aim of the study is to analyze heat transfer processes in systems with different thermal characteristics and to develop methods for determining the exact temperature distribution in each layer. Using the heat conduction equation, the corresponding equations are analytically solved for each layer, taking into account the continuity of temperature and heat flux at the boundaries between the layers. Particular attention is paid to stationary and nonstationary processes. The results of the study can be used to optimize multilayer structures in construction, energy, and other industries where it is important to ensure effective thermal insulation or heat distribution. The analytical approach provides accurate modeling of temperature fields in complex systems and allows predicting the effect of boundary conditions on heat transfer in multilayer materials.

Keywords: heat transfer; multilayer structures; analytical solution; boundary conditions.

У сучасній науці та інженерії важливим завданням є ефективне моделювання процесів теплопередачі в багатошарових структурах. Такі структури часто зустрічаються в будівництві, енергетиці, а також в аерокосмічній галузі. Оскільки, ці системи складаються з шарів матеріалів з різними фізичними властивостями, аналітичний підхід до розв'язку задач теплопередачі є ключовим для прогнозування їхньої поведінки в умовах теплових навантажень. Дослідження присвячене розробці аналітичних методів для розв'язку задач теплопередачі в багатошарових структурах з фіксованими граничними умовами.

Математична модель

Основою дослідження є рівняння теплопровідності, яке описує зміну температурного поля в залежності від часу та просторових координат[1]. Для одновимірного випадку в стаціонарному режимі це рівняння виглядає наступним чином:

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) = 0 \quad (1)$$

де $k(x)$ – теплопровідність матеріалу, яка може змінюватися від шару до шару, а $T(x)$ – температура у кожній точці матеріалу.

Для нестационарного процесу рівняння теплопровідності приймає вигляд:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (2)$$

де ρ — густина матеріалу, c — теплоємність, а t — час.

Граничні умови. У даному дослідженні розглядаються фіксовані граничні умови першого роду. Це означає, що температура на зовнішніх границях багат шарової структури є сталою і визначається заздалегідь[2]:

$$T(0) = T_{left}, T(L) = T_{Right} \quad (3)$$

де T_{left} та T_{Right} — це задані температури на лівій та правій межах відповідно, а L — товщина всієї багат шарової структури.

Для кожного шару рішення рівняння теплопровідності буде лінійним і описуватиметься наступною функцією:

$$T_i(x) = A_i x + B_i \quad (4)$$

де A_i та B_i — це константи, які визначаються з умов безперервності температури і теплового потоку на межах між шарами, а також з граничних умов на зовнішніх межах багат шарової системи.

Аналітичний підхід

Аналітичний розв'язок задачі теплопередачі в багат шарових структурах полягає у розв'язанні системи рівнянь теплопровідності для кожного шару із застосуванням умов на межах шарів. Це забезпечує неперервність як температури, так і теплового потоку через границі між шарами[3]:

$$T_i(x_i) = T_{i+1}(x_i), \quad k_i \frac{dT_i}{dx} = k_{i+1} \frac{dT_{i+1}}{dx} \quad (5)$$

Де k_i та k_{i+1} – теплопровідності для сусідніх шарів i та $i+1$.

Ці умови використовуються для визначення коефіцієнтів A_i та B_i для кожного шару.

У нестационарному режимі теплопередачі аналітичний підхід також передбачає використання таких методів, як метод розділення змінних та інтегральні перетворення[4]. Метод розділення змінних дозволяє розділити залежність температури на просторову та часову складові, представивши температуру у вигляді добутку функцій $T(x,t)=X(x)\cdot\Theta(t)$ $T(x,t) = X(x)$. Підстановка цього виразу в рівняння теплопровідності призводить до утворення двох окремих диференціальних рівнянь для кожної змінної, що полегшує їхнє розв'язання.

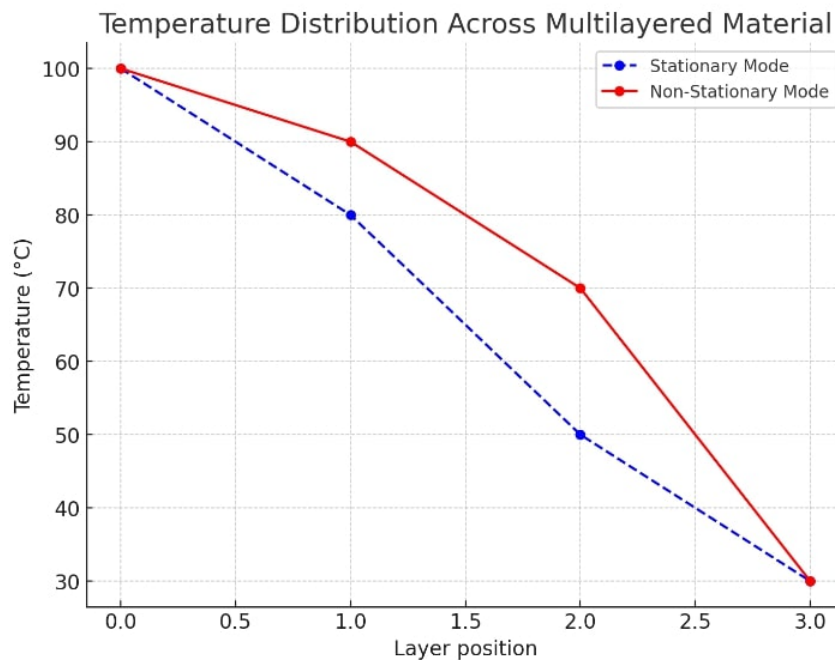
Перетворення Лапласа застосовують для перетворення диференціальних рівнянь щодо часу в алгебраїчні рівняння, що значно спрощує розв'язання нестационарних задач. Цей підхід особливо ефективний для випадків, де потрібно враховувати початкові умови, такі як зміна температури з часом.

Перетворення Фур'є часто використовують для задач з періодичними граничними умовами, де температурний розподіл змінюється циклічно. Воно дозволяє представляти розв'язок у вигляді суми гармонічних функцій, що описують поведінку системи в кожному циклі. Ці методи надають гнучкі інструменти для аналітичного дослідження складних процесів теплопередачі.

Вплив граничних умов та теплотехнічних властивостей матеріалів.

У ході дослідження було проаналізовано вплив граничних умов на температурний розподіл у багатошарових структурах. Результати показують, що матеріали з різними теплотехнічними характеристиками, такими як теплопровідність та теплоємність, значно впливають на розподіл температури в шарах залежності від того чи це стаціонарні, чи нестационарні процеси теплопередачі що можна побачити на малюнку 1. Наприклад, якщо один із шарів має низьку теплопровідність, то він буде виступати бар'єром для

теплогового потоку, що призведе до значних перепадів температури на межах між шарами.



Мал. 1 Розподілення температури крім багат шаровий матеріал

Крім того, було виявлено, що швидка зміна зовнішніх температурних умов може призвести до перехідних процесів, які вимагають додаткового аналізу з точки зору динамічної теплопередачі. Для таких процесів використання аналітичних методів дозволяє оцінити швидкість адаптації температурного профілю структури до нових граничних умов.

Висновок

Аналітичний підхід до розв'язку задачі теплопередачі в багат шарових структурах з фіксованими граничними умовами є ефективним інструментом для прогнозування температурного розподілу в системах з різними теплотехнічними характеристиками. Запропоновані методи можуть бути використані для оптимізації конструкцій у будівництві, енергетиці та інших галузях, де важливо контролювати тепловий режим матеріалів. Аналітичні рішення дозволяють чітко моделювати як стаціонарні, так і нестаціонарні процеси теплопередачі, що робить їх корисними для широкого кола інженерних задач.

Список використаної літератури:

1. Duda P., Heat Transfer Coefficient Distribution, A Review of Calculation Methods. *Energies* 2023, p. 16(9) 3683, doi:10.3390/en16093683
2. Incropera F.P., DeWitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, vol. 6th. John Wiley & Sons, New York 2007. – p. 1070
3. Lu, X., Tervola, P., and Viljanen, M., 2006, “Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Composite Circular Cylinder,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49 (1-2), pp. 341–348. doi: doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019
4. Jain P.K., Singh S., Uddin R., Analytical Solution to Transient Asymmetric Heat Conduction in a Multilayer Annulus. *Journal of Heat Transfer*, 2009, 131(1): 011304 doi: 10.1115/1.2977553