

УДК 004.94; 674.047

Самотій Т.С.¹, Соколовський Я.І.²

¹ аспірант кафедри КН, асистент кафедри ІПЗ,
Національний лісотехнічний університет України, Львів, Україна,
<https://orcid.org/0000-0002-1317-8786>. t.samotiy@nltu.edu.ua

² професор кафедри САП, НУ «Львівська політехніка», Львів, Україна,
<https://orcid.org/0000-0003-4866-2575> . yaroslav.i.sokolovskyi@lpnu.ua

НЕЙРОМЕРЕЖЕВИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕПЛООБМІНУ У СЕРЕДОВИЩАХ З ФРАКТАЛЬНОЮ СТРУКТУРОЮ

Анотація. У даній роботі представлено та досліджено математичну модель нестационарного процесу теплообміну у капілярно-пористих середовищах, яка описується диференціальними рівняннями в частинних похідних дробового порядку з граничними умовами третього роду. Фрактальний нейромережвий метод, заснований на fPINN-архітектурі, використано для прискорення розрахунків та обчислення чисельного розв'язку диференціального рівняння у дробових похідних для різних значень дробових параметрів. Розроблено програмне забезпечення для втілення нейромережової методики, а також обґрунтовано вибраний підхід шляхом порівняння отриманих чисельних результатів з даними, отриманими за допомогою чисельних методів скінченних різниць.

Ключові слова: процес теплопереносу, дробові похідні, метод скінченних різниць, нейронні мережі на основі фізики, програмне забезпечення.

Сучасна наука стикається з викликом розробки точних математичних моделей для опису нерівноважних фізичних процесів, особливо в системах з фрактальною структурою. Такі системи відзначаються особливими властивостями, такими як "пам'ять", складні просторові кореляції та здатність до самоорганізації. Моделювання таких систем потребує нових підходів, серед яких значну роль відіграє використання диференціальних рівнянь із дробовими похідними. Дробове числення є розширенням класичного числення і дозволяє описувати ередитарність та самоорганізацію системи, що робить його важливим для вивчення фрактальних систем.

Рівняння з дробовими похідними мають високу складність, тому для їх розв'язання використовуються аналітичні та чисельні методи. До аналітичних методів належать перетворення Лапласа, методи варіаційної ітерації, декомпозиції та гомотопічних збурень [1-3]. Однак для багатьох нелінійних дробових диференціальних рівнянь отримати аналітичний розв'язок часто виявляється неможливо, що змушує звертатися до чисельних методів.

Наукова література пропонує різноманітні чисельні методи для розв'язання дробових диференціальних рівнянь. Однак більшість із них спрямовані на конкретні типи рівнянь і можуть мати високі обчислювальні витрати при вирішенні складних завдань, таких як оптимізація або моделювання з невизначеністю. Це створює потребу у швидших та ефективніших методах, зокрема сурогатних моделях, що базуються на машинному навчанні та нейронних мережах, які здатні інтегрувати фізичні властивості системи для отримання точних і надійних рішень.

Штучні нейронні мережі (ШНМ) добре підходять для вирішення різноманітних задач машинного навчання. Дослідження щодо застосування ШНМ для розв'язку задач, описаних диференціальними рівняннями, розпочалося ще в 1990-х роках. Наприклад, Lee та Kang використали нейронну мережу Хопфілда для розв'язку диференціальних рівнянь першого порядку [4], а Meade та Fernandez — багатошаровий перцептрон для нелінійних рівнянь [5].

Lagaris та ін. продемонстрували, як ШНМ можуть вирішувати як звичайні диференціальні рівняння, так і рівняння в частинних похідних з початковими та граничними умовами [6].

У більш пізніх роботах було запропоновано гібридні нейронні мережі для розв'язання диференціальних рівнянь високого порядку [7], а також застосування алгоритмів глибокого навчання для підвищення ефективності обчислень [8]. Зокрема, нейронні мережі, засновані на фізичних законах (PINN), використовуються для розв'язку як прямих, так і обернених задач, із мінімальними змінами коду [9].

Подальші дослідження PINN адаптували ці мережі для вирішення дробових, інтегро-диференціальних і стохастичних рівнянь [10]. Наприклад, у деяких роботах PINN застосовували для ідентифікації параметрів дробових диференціальних рівнянь, коли загальна форма рівняння відома, але невідомі конкретні оператори та коефіцієнти [11].

У нашій роботі ми зосередились на застосуванні нейромережевого підходу для моделювання неізотермічного теплообміну в капілярно-пористих матеріалах з урахуванням ефекту пам'яті та просторових кореляцій.

У цьому дослідженні математична модель процесу теплоперенесення в капілярно-пористих матеріалах із фрактальною структурою представлена диференціальним рівнянням у частинних похідних дробового порядку як за часом, так і за простором, з відповідними початковими та граничними умовами 3-го роду. У рівняннях враховано різноманітні коефіцієнти та умови, пов'язані з процесами теплопровідності та теплообміну:

$$c\rho \frac{\partial^\alpha T}{\partial \tau^\alpha} = \lambda \frac{\partial^\beta T}{\partial x^\beta} + f(\tau, x). \quad (1)$$

Рівняння (1) має задовільняти наступні початкові та граничні умови:

$$T|_{\tau=0} = T_0(x), \quad (2)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} \right|_{x=0} = \alpha^*(T|_{x=0} - t_c), \quad (3)$$

$$\lambda \left. \frac{\partial^\nu T}{\partial x^\nu} \right|_{x=l} = \alpha^*(T|_{x=l} - t_c), \quad (4)$$

де τ — часова координата, $\tau \in [0, \tau_{\max}]$; x — просторова координата, $x \in [0, l]$; $T(\tau, x)$ — температура; c — теплоємність; ρ — щільність; λ — коефіцієнт теплопровідності; t_c — температура навколишнього середовища; $\alpha^*(t_c, \nu)$ — коефіцієнт теплопередачі; α — дробовий порядок похідної за часом ($0 < \alpha \leq 1$); β, ν — дробові показники похідної за просторовими координатами ($1 < \beta \leq 2$), ($0 < \nu \leq 1$).

Для подання моделі (1)-(4) у вигляді фрактальної нейронної мережі використовується архітектура fPINN [11] (Рис.1).

Застосування класичного автоматичного диференціювання до дробового числення є проблематичним, оскільки дробове правило диференціювання виражається через нескінченний ряд, що ускладнює обчислювальні процеси. Для вирішення цієї проблеми використовується архітектура fPINN, яка дозволяє виконувати автоматичне диференціювання для аналітичного обчислення похідних цілого порядку на основі результатів мережі, тоді як дробові похідні апроксимуються за допомогою стандартних чисельних методів дискретизації [11].

Вихідні значення мережі, представленої на рисунку 1, наближають розв'язок диференціального рівняння (1) з дробовими похідними і задовольняють початкові та граничні умови (2)-(4):

$$\tilde{T}(x, t) \approx N_T(X, \mu_T), \quad (5)$$

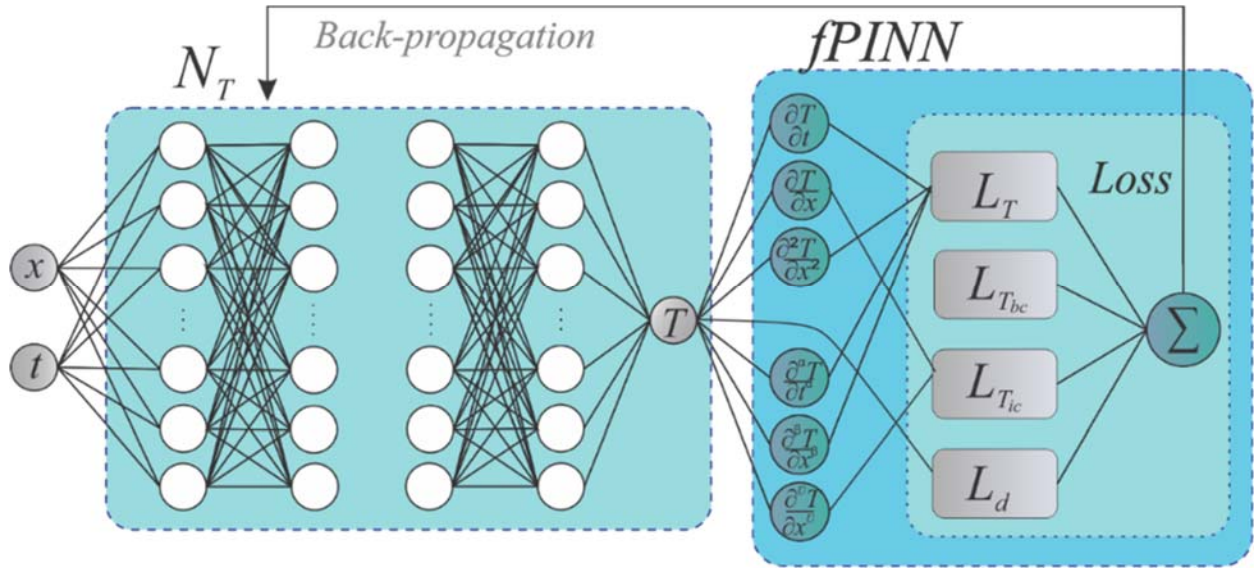


Рис.1. Архітектура нейронної мережі

Функцію втрат для виходу мережі (5) було визначено наступним чином:

$$\mathcal{L}_{N_T} = \eta_d \mathcal{L}_d + \eta_T \mathcal{L}_T + \eta_{ic} \mathcal{L}_{T_{ic}} + \eta_{bc} \mathcal{L}_{T_{bc}}, \quad (6)$$

де втрати, пов'язані з навчальним набором даних, розраховуються за допомогою наступної формули:

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{N_d} \sum_{i=1}^{N_d} (\tilde{T}_i - T_i^*)^2. \quad (7)$$

Функція втрат, що містить інформацію про фізику процесу, має такий вигляд:

$$\mathcal{L}_T = \frac{1}{N_T} \times \sum_{k=1}^K \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{cp}{\chi^\alpha T^{(1-\alpha)}} [d_0 T_n^k - d_{k-1} T_n^0 + \sum_{j=1}^{k-1} (d_i - d_{i-1}) T_n^{k-i} - \frac{\lambda}{h\beta} \sum_{j=0}^n \gamma_j^\beta T_{n+1-j}^k - f_n^k] \right]^2 \quad (8)$$

Для моделювання нестационарного процесу був розроблений програмний додаток мовою програмування Python. Проведено порівняння числових результатів, отриманих за допомогою нейронної мережі та методу скінчених різниць (Рис. 2).

Для оцінки надійності і точності запропонованої моделі також було здійснено порівняння результатів, отриманих від виходу нейронної мережі для полів температури з даними, отриманими іншими дослідниками [12], які застосовували метод скінчених різниць. Це дозволило визначити, наскільки близькими є результати нейронної мережі до тих, що отримані традиційними чисельними методами.

На рисунку 3 представлений графік, що демонструє зміни температури зразка з базовою густиною 460 кг/м³ з урахуванням фрактальної структури матеріалу та різних температур сушильного агента (70 °C і 90 °C). Аналіз графіка показує, що зі збільшенням температури агента зростає інтенсивність прогрівання зразка.

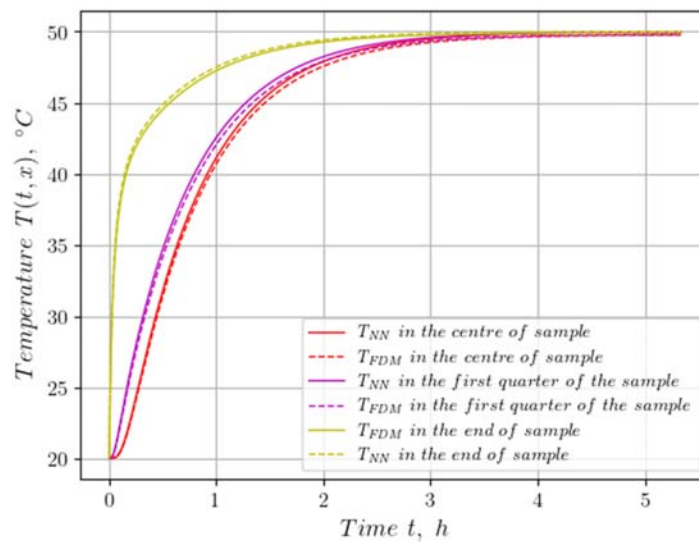


Рис.2. Прогнозування зміни температури за допомогою нейронної мережі (NN) та методу скінченних різниць (FDM)

Вплив фрактальної структури, зокрема дробово-диференціальних показників моделі α та β , стає помітнішим при підвищенні температури. Наприклад, температура у центрі зразка зростала швидше з використанням фрактального параметра β порівняно з цілочисельним, що сприяє швидшому прогріванню зразка. Різниця в температурах з урахуванням фрактальної структури становить близько 4 градусів, що свідчить про її значний вплив на температурні зміни в матеріалі.

Крім того, зменшення значення параметра β призводить до швидшого підвищення температури капілярно-пористого матеріалу до температури сушильного агента, тоді як дробовий показник α може уповільнити нагрівання, що сповільнює процеси переміщення маси в матеріалі.

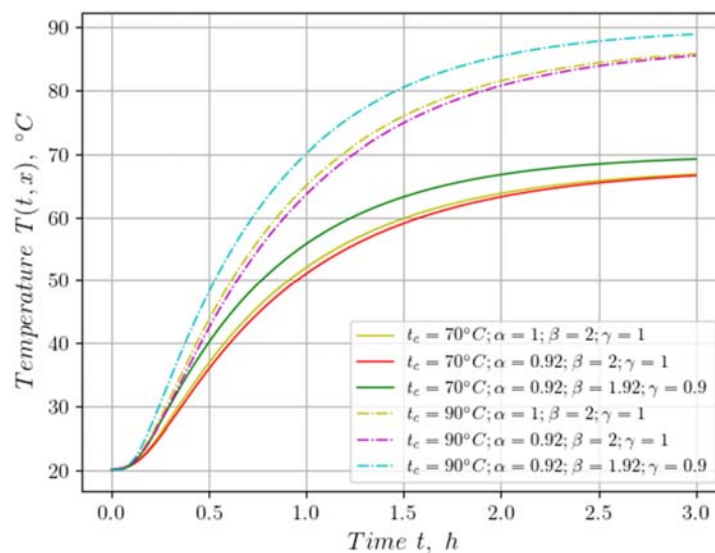


Рис.3. Зміна температури у центрі зразка для різних значень показників похідних моделі α , β та під впливом різних температур сушильного агента

Висновки. Розглянута одновимірна математична модель описує процес теплопереносу в пористих середовищах з урахуванням фрактальної структури матеріалу. Для реалізації цієї моделі застосовано фрактальний нейромережевий підхід, який дозволяє аналізувати еволюцію теплових полів при різних значеннях дробових похідних в одновимірному контексті. Оптимізація параметрів нейромережі здійснюється шляхом введення функцій втрат, які відображають фізичну природу досліджуваного процесу. Для побудови різницевої схеми для функцій втрат використано формули чисельного диференціювання в рамках дробового обчислення для опису фрактальних операторів. Проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих за допомогою фрактальної нейромережі, з результатами, отриманими методом скінчених різниць. Це порівняння підтверджує високу точність і ефективність розробленого підходу.

1. Zúñiga-Aguilar, C. J., Romero-Ugalde, H. M., Gómez-Aguilar, J. F., Escobar-Jiménez, R. F., & Valtierra-Rodríguez, M. (2017). Solving fractional differential equations of variable-order involving operators with Mittag-Leffler kernel using artificial neural networks. *Chaos, Solitons & Fractals*, 103, 382–403.
2. Kexue, L., & Jigen, P. (2011). Laplace transform and fractional differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 24(12), 2019–2023.
3. Pyanylo, Ya., Vasyunik, M., & Vasyunik, I. (2013). The use of Laguerre polynomials for the spectral method of solving equations with time fractional derivatives. *Physical and Mathematical Modeling and Information Technologies*, 17, 163–167. Available: http://nbuv.gov.ua/UJRN/Fmmit_2013_17_19
4. Lee, H., & Kang, I.S. (1990). Neural algorithm for solving differential equations. *Journal of Computational Physics*, 91, 110–131.
5. Meade Jr, A. J., & Fernandez, A. A. (1994). Solution of nonlinear ordinary differential equations by feedforward neural networks. *Mathematical and Computer Modelling*, 20, 19–44.
6. Lagaris, I. E., Likas, A., & Fotiadis, D. I. (1998). Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 9, 987–1000.
7. Malek, A., & Beidokhti, R. S. (2006). Numerical solution for high order differential equations using a hybrid neural network-optimization method. *Applied Mathematics and Computation*, 183, 260–271.
8. Guo, Y., Cao, X., Liu, B., & Gao, M. (2020). Solving partial differential equations using deep learning and physical constraints. *Applied Sciences*, 10, 5917.
9. Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707.
10. Yang, L., Zhang, D., & Karniadakis, G. E. (2018). Physics-informed generative adversarial networks for stochastic differential equations. arXiv preprint arXiv:1811.02033.
11. Pang, G., Lu, L., & Karniadakis, G. E. (2019). fPINNs: Fractional physics-informed neural networks. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 41, A2603–A2626.
12. Sokolovskyy, Y., Levkovich, M., Mokrytska, O., & Kaspryshyn, Y. (2019). Mathematical Modeling of Nonequilibrium Physical Processes, Taking into Account the Memory Effects and Spatial Correlation. *9th International Conference on Advanced Computer Information Technologies, ACIT 2019 – Proceedings*, 56–59. <https://doi.org/10.1109/ACITT.2019.8780011>