

СЕКЦІЯ «МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ СИСТЕМ»

Ольга Дмитрієва*, Віра Гуськова*, Артем Халигов

¹ НТТУ «КПІ ім. І. Сікорського», Київ, Україна, ORCID: 0000-0001-8921-8433, Інститут моделювання водно-екологічних систем університету Штутгарта, Штутгарт, Німеччина, olga.dmytriyeva@iws.uni-stuttgart.de

² НТТУ «КПІ ім. І. Сікорського», Київ, Україна, ORCID: 0000-0001-7637-201X, huskova.vira@iit.kpi.ua

³ Інститут телекомунікацій та глобального інформаційного простору, Київ, Україна, ORCID: 0009-0006-5465-4650, artem.khalygov@djangostars.com

Стохастичне моделювання гідродинамічних систем

***Анотація.** Запропоновано числові підходи до реалізації стохастичних моделей, що описуються системами звичайних диференціальних рівнянь в формі Іто. Стохастичний характер досліджуваних процесів, величезна кількість симуляцій і жорсткі вимоги щодо точності отриманих результатів вимагають адаптації кроку інтегрування. Для вирішення цієї проблеми в роботі пропонується використання інтеграторів, побудованих на багатокрокових блокових методах з застосуванням інтерполяційних багаточленів Ерміта з кратними вузлами. На прикладі трикамерної моделі водойми наведено результати програмних реалізацій з оцінюванням локальних похибок і показників динаміки зміни кроків інтегрування.*

***Ключові слова** – управління кроком, чисельне моделювання, стохастичні системи, гідродинаміка.*

Вступ. Сучасні дослідження, пов'язані з симуляцією поведінки динамічних процесів, все частіше використовують стохастичні підходи, що дозволяють описувати імовірнісну поведінку не лише об'єкта дослідження, а й оточуючого середовища [1]. Такі підходи стають особливо актуальними при аналізі поведінки нестационарних систем гідродинаміки, таких як водосховища, гирлові зони та мілководні екосистеми, де дослідники стикаються з необхідністю опису процесів, що протікають в умовах значної природної та антропогенної мінливості [2]. Коливання припливу, нестійкість течій, турбулентні пульсації та сезонні зміни зовнішніх впливів роблять водні системи за своєю суттю стохастичними.

Традиційні детерміністичні моделі, засновані на усереднених параметрах, часто не відображають реального діапазону можливих станів системи та не дозволяють коректно оцінювати невизначеність прогнозів. У зв'язку з цим застосування стохастичних диференціальних рівнянь у гідродинаміці стає важливим інструментом аналізу складних нестационарних процесів. Особливого значення стохастичні підходи набувають при моделюванні якості води та перенесення забруднюючих речовин [2-3]. У таких завданнях джерела стохастичності пов'язані не лише із змінами гідрологічних характеристик, а й із флуктуаціями у процесах осадження донних відкладень та біохімічних реакцій. Включення шумових термінів моделі обміну між водною і донною фазами дозволяє враховувати випадкові збурення, зумовлені турбулентністю і нерівномірністю потоку. Це забезпечує більш реалістичне відтворення динаміки концентрацій та підвищує надійність прогнозів стану водних екосистем із впливом зовнішніх факторів різної природи.

Стохастична модель водойми з концентрацією забруднювача у воді та донних осадженнях. У роботі розглядається стохастична модель водойми з припливом, виносом та осадженням [3], яка враховує гідродинаміку, концентрацію розчиненої речовини (забруднювача) та опадів. Такі моделі дозволяють відстежувати процеси перенесення важких металів та інших забруднень у водосховищах. Математичний опис складних взаємодій між припливом, виносом, обміном речовини (забруднювачем) між шарами води і донними осадженнями, а також хіміко-біологічними реакціями дозволяє звести просторово розподілену задачу гідродинаміки до обчислювально-стійких і інтерпретованих в часі залежностей, представлених у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР) у формі Коші, які дозволяють описувати динаміку основних параметрів: об'єму, швидкості перебігу, концентрації розчинених речовин.

Введення стохастичних членів у СЗДР дозволяє врахувати невизначеність зовнішніх факторів, таких як флуктуація притоку, турбулентні пульсації, нестационарність метеорологічних впливів, біохімічні реакції. Ведені стохастичні компоненти додають до детерміністичної основи ймовірнісні через опис випад-

кових збурень, забезпечуючи більш реалістичне і статистично стійке моделювання поведінки гідродинамічних систем в умовах мінливого середовища. У даному випадку повна система стохастичних диференціальних рівнянь представляється у формі Іто з адитивним незалежним шумом має вигляд

$$\begin{cases} dx_1(t) = (Q_{in} - Q_{out})dt + \sigma_1 dW_t^{(1)}, \\ dx_2(t) = \left(\frac{Q_{in}C_{in} - Q_{out}x_2(t)}{x_1(t)} - k_s(x_2(t) - x_3(t)) \right) dt + \sigma_2 dW_t^{(2)}, \\ dx_3(t) = (k_s(x_2(t) - x_3(t)) - k_d(t)x_3(t)) dt + \sigma_3 dW_t^{(3)}, \end{cases} \quad (1)$$

де $x_1(t)$ – об'єм води (змінюється згодом через приплив/відтік),

$x_2(t)$ – концентрація забруднювача у воді,

k_s – коефіцієнт обміну між водою та донними осадженнями,

k_d – швидкість деградації забруднювача в донному шарі,

Q_{in} – стаціонарний середній потік припливу,

Q_{out} – стаціонарний середній потік відтоку,

C_{in} – вхідний забруднений приплив,

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – функції інтенсивності шуму,

$W_t^{(1)}, W_t^{(2)}, W_t^{(3)}$ – винеровські процеси.

У ординарних випадках для розв'язання (1) використовуються явні схеми Ейлера-Маруяма чи Мільштейна [1,3] з фіксованим кроком інтегрування. Однак ці схеми характеризуються нестабільністю у разі порушення обмежень на вибір кроку інтегрування, нерідко такі обмеження стають у принципі неприйнятними. У таких випадках, а також для "жорстких" режимів необхідно розглядати неявні схеми або адаптивний крок. Додатково можна говорити і про підходи, пов'язані із залученням розрахункових схем, які можуть бути розпаралелені.

Програмна реалізація. В якості числових значень параметрів $k_s, k_d, Q_{in}, Q_{out}, C_{in}$, початкових умов $x_1(t_0), x_2(t_0), x_3(t_0)$ і часових інтервалів для симуляцій (2) вибиралися значення, обґрунтовані в [2-3]. Великі значення параметра інтенсивності випадкових флуктуацій (в програмних реалізаціях $\sigma_1 = 5 * 10^4$) призводять до необхідності значно скорочувати крок інтегруван-

ня, що є неприйнятним для тривалих інтервалів симуляцій. Стохастичний характер досліджуваних процесів додатково потребує величезну кількість таких симуляцій, що значно збільшує загальний час отримання результатів. Для вирішення цієї проблемної ситуації в роботі пропонується використання інтеграторів, побудованих на багатокрокових блокових методах [4], в яких відновлення опорних значень при скороченні кроку здійснюється за допомогою інтерполяційних багаточленів Ерміта з кратними вузлами. Такий підхід дозволяє значно скоротити кількість розрахункових точок у кожній симуляції, виконуючи розрахунки із залученням кінцево-різницевої композиції високих порядків точності.

На рис. 1-2 представлені результати чисельних симуляцій функцій $(x_i(t), i = 1, 2, 3)$ протягом часового інтервалу в 30 днів. Показник зміни обсягу води $x_1(t)$ винесено на окремий графік через значні розбіжності в масштабах (рис. 1). Реальні симуляції проводилися для часового інтервалу 365 днів.

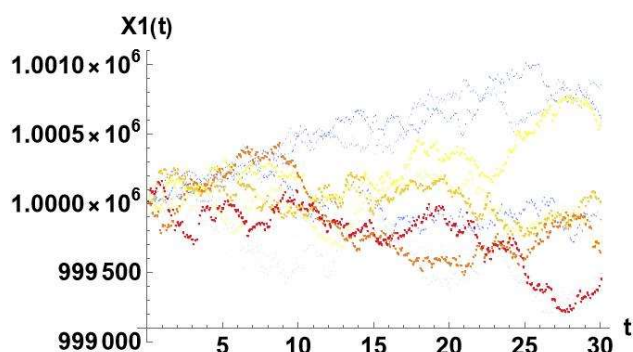


Рисунок 1. Чисельні розв'язки (1) за $x_1(t)$

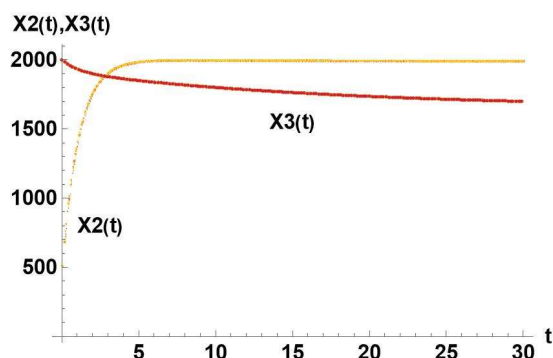


Рисунок 2. Чисельні розв'язки (1) за $x_2(t), x_3(t)$

Регламентована величина локальних похибок варіювалася в межах $10^{-1} \leq \varepsilon \leq 10^{-3}$. На рис. 3-4 наведено локальні похибки, отримані за множиною симуляцій з регламентованими значеннями $\varepsilon = 10^{-3}$ (рис. 3) і $\varepsilon = 10^{-6}$ (рис. 4). Легко переконатися, що в жодній із симуляцій задана локальна похибка не була перевищена.

Рис. 5-6 містять показники динаміки зміни кроку інтегрування при заданій локальній похибці $\varepsilon = 10^{-3}$ (рис. 5) та $\varepsilon = 10^{-6}$ (рис. 6).

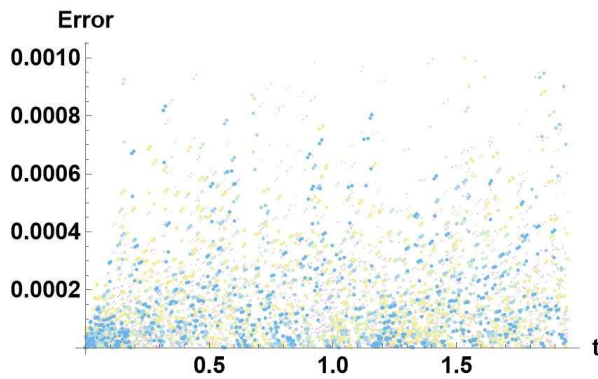


Рисунок 3. Локальні похибки чисельної реалізації (1) для $\varepsilon = 10^{-3}$

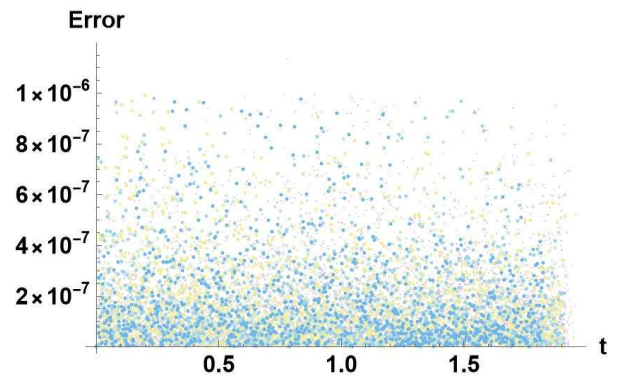


Рисунок 4. Локальні похибки чисельної реалізації (1) для $\varepsilon = 10^{-6}$

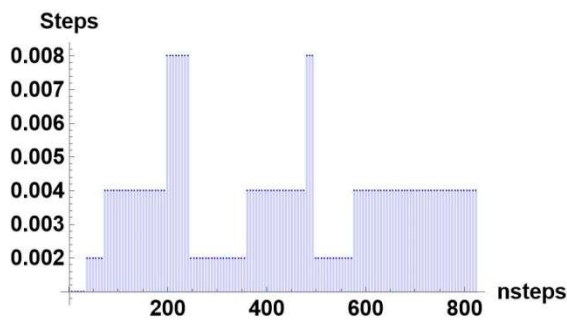


Рисунок 5. Динаміка зміни кроку інтегрування при $\varepsilon = 10^{-3}$

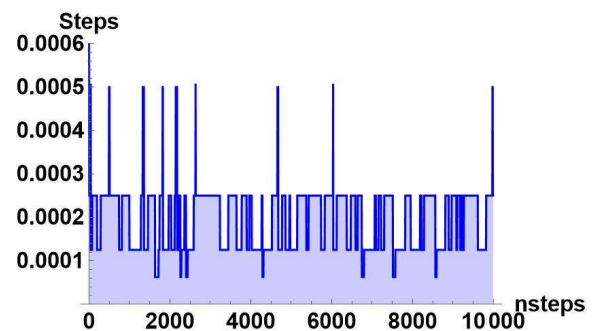


Рисунок 6. Динаміка зміни кроку інтегрування при $\varepsilon = 10^{-6}$

Висновок. Отримані результати симуляцій демонструють можливість використання запропонованого підходу управління кроком інтегрування при чисельному моделюванні стохастичних систем, що дозволяє істотно підвищити ефективність обчислювального процесу. На відміну від схем з фіксованим кроком, де кроки інтегрування вибираються в діапазоні $\tau \lesssim 10^{-6} - 10^{-5}$, адаптивний підхід автоматично змінює розмір кроку в залежності від локальної динаміки системи. Це забезпечує як збереження необхідної точності апроксимації, так і значне зменшення загальної кількості кроків інтегрування кожної окремої симуляції. Таким чином, використання адаптивного кроку дозволяє оптимізувати баланс між точністю та часом, що витрачається на кожну симуляцію.

Список використаних літературних джерел

- [1] Chen, N. (2025). Stochastic Methods for Modeling and Predicting Complex Dynamical Systems. Springer Nature. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/978-3-031-81924-7>
- [2] Teixeira, E., Coelho, M., Pinto, E., Rinco, A. (2022). Stochastic Simulation in Reservoir Sedimentation Estimation. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1590/0001-3765202220211573>
- [3] Yoshioka, H. (2022). Towards control of dam and reservoir systems with forward–backward stochastic differential equations. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1002/adc2.104>
- [4] Dmytriyeva, O. (2025). Construction of block integrators for hard dynamic problems with coordination of approximation order during step adaptation// *Information Science and Modelling*. Vol. 2(14). [Online]. Available: <https://doi.org/10.20998/2411-0558.2025.02.01>

Stochastic simulation of hydrodynamic systems

Olga Dmytriyeva, Vira Huskova, Artem Khalyhov

This paper presents numerical approaches for implementing stochastic models described by systems of ordinary differential equations in the Itô form. The stochastic nature of hydrodynamic processes, the large number of required simulations, and the strict accuracy demands necessitate the adaptation of the integration step. To address this issue, we propose the use of integrators based on multistep block methods employing Hermite interpolation polynomials with multiple nodes. Using a three-compartment model of a water body as an example, the results of numerical implementations are presented, including the evaluation of local errors and the analysis of the dynamic behavior of adaptive step changes during computation.