

Вероніка Швець, Юлія Сеник

¹ НЛТУ України, Львів, Україна, ORCID:0009-0004-3937-1869,
122.24shvets.v@nltu.lviv.ua

² НЛТУ України, Львів, Україна. ORCID: 0000-0001-6524-4741,
yuliia.senyk@nltu.edu.ua

Математична модель впливу розмірних ефектів на ефективні модулі пружності тонких плівок

Анотація. Запропонована математична модель та проведено чисельне дослідження виникаючих в малорозмірних тілах розмірних ефектів і пов'язаних з цим питань міцності. Прийнято суттєву залежність пружних властивостей від неоднорідності матеріалу тіла і відображено це шляхом врахування степеневих залежностей пружних характеристик. Розглянуто особливості моделювання розмірного ефекту міцності шару та розмірного ефекту ефективних модулів пружності. Із застосуванням прикладних пакетів комп'ютерної математики представлена візуалізація результатів проведених досліджень.

Ключові слова – математична модель, модулі пружності, розмірні ефекти, міцність.

Якісним показником електронних пристроїв та різноманітних обчислювальних приладів є надійність їхньої роботи. Вимоги до надійності елементів приладів створили актуальною проблему раціонального підбору їхніх міцнісних, жорсткісних, деформаційних та інших експлуатаційних параметрів. Визначення з достатньою точністю вказаних параметрів, яка враховує структуру та властивості матеріалу реальних твердих тіл. Структура матеріалу та вплив критичного навантаження призводять до виникнення в тілі розмірних ефектів, що особливо відчутно проявляються для випадку наноматеріалів [1].

Тонкі металеві та напівпровідникові плівки, що мають застосування в електроніці та інформаційно-комунікаційних технологіях, за своєю природою є об'єктами з дуже різноманітними фізичними властивостями, причому фізичні характеристики речовини у вигляді плівки можуть істотно відрізнятися від властивостей цих матеріалів у масивному стані. Це створює значні проблеми при використанні плівок для технічних матеріалів та різноманітних елементів обчи-

слювальних приладів, але водночас різноманіття та мінливість властивостей тонких плівок істотно розширюють можливості їх практичного застосування. Знання основних закономірностей зміни властивостей тонких плівок необхідно при створенні плівкових матеріалів із заданими властивостями.

Останнім часом актуальність дослідження закономірностей зміни фізичних властивостей речовини під час переходу до плівкового стану істотно зростає.

Математична модель. Розглянемо безмежний ізотропний деформівний електропровідний неферромагнітний твердий шар, що займає область у прямокутній декартовій системі координат. Шар у цілому електронейтральний, його поверхні є вільними від зовнішнього силового навантаження і на них задано сталі значення густини, відмінне від відлікового значення, котре характерне для безмежного однорідного середовища.

У випадку вказаної вище зовнішньої дії рівноважний стан півпростору залежить лише від координати і описується ключовою системою рівнянь для визначення: густини, термодинамічного електричного потенціалу і компонент тензора напружень. Розв'язуючу систему рівнянь запишемо для визначення густини ρ , електричного потенціалу ϕ , електричного заряду ω та компонент тензора напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz}

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{yy} - \frac{\nu}{E} \sigma \right) &= \frac{d^2}{dx^2} a_0 [a_m (\rho - \rho_*) + a_0^\omega \phi], \\ \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \frac{a_{\omega\omega}}{\varepsilon_0} \phi + \frac{a_{m\omega}}{\varepsilon_0} (\rho - \rho_*) &= 0, \\ \sigma &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}, \\ \frac{d^2 \rho}{dx^2} - \xi^2 (\rho - \rho_*) &= -\xi^2 d_{sm}, \end{aligned} \quad (1)$$

де d_{sm} – інтенсивність джерел маси, $a_0, a_0^\omega, a_{\omega\omega}, a_{m\omega}, \varepsilon_0, \xi$ – сталі.

Дану систему рівнянь необхідно доповнити умовами електронейтральності тіла, а також умовами на поверхнях шару.

Програмна реалізація. Із застосуванням прикладних програмних продуктів комп'ютерної математики, проведено чисельні дослідження та візуалізацію результатів математичної моделі [2, 3]. Розподіл густини симетричний за товщиною шару і залежить від характерних розмірів та поверхневого збурення. Чисе-

льні дослідження проводилися у програмних середовищах Mathcad та Maple. На рис. 1 показано розподіл густини у шарі для різних значень його товщини.

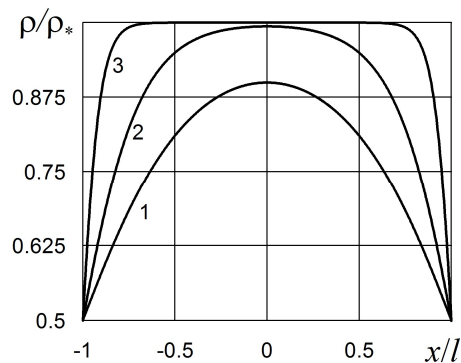


Рисунок 1. Розподіл густини у шарі різної товщини

Як видно, на поверхні тіла збурення густини щодо відлікового значення є максимальне і зменшується в глибину тіла.

Напруження у тілі мають величезне прикладне значення, а їх аналіз належить до основних задач інженерії. У випадку структурно-неоднорідних тіл напружений стан тіла буде залежати як від умов силового навантаження тіла, так і напружень, обумовлених різними умовами взаємодії частинок біля поверхні тіла (так званих приповерхневих напружень, у випадку цієї задачі залежних передусім від поверхневого збурення густини).

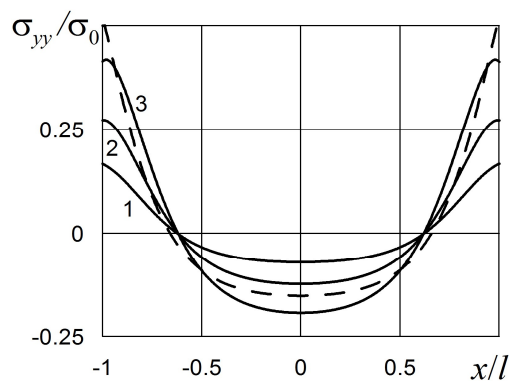


Рисунок 2. Розподіл напружень у шарі: вплив електричної підсистеми

На рис. 2 показано розподіл напружень по товщині вільного від силового навантаження шару для різних параметрів.

Пунктирна лінія на цьому рисунку відповідає випадку нехтування залежністю модулів пружності від густини. Як видно з графіку, розподіл напружень

симетричний за товщиною шару, приповерхневі напруження розтягуючі, у серединній частині шару – стискаючі.

Врахування нелінійності пружних характеристик призводить до зменшення поверхневих напружень порівняно із випадком сталих, а врахування електронної підсистеми суттєво змінює величину напружень як біля поверхні, так і у внутрішніх областях шару.

Напружений стан структурно-неоднорідних тіл залежить як від умов силового навантаження тіла, так і напружень, обумовлених різними умовами взаємодії частинок біля поверхні тіла - приповерхневих напружень, що суттєво залежать від поверхневого збурення густини. Для дослідження останніх в умовах вибору реального матеріалу розглянуто сплави на основі титану, що знаходять широке застосування як матеріали спеціального призначення завдяки привабливому комплексу їх властивостей. Такий матеріал має високу питому міцність, меншу пружність і кращу стійкість в корозійному середовищі а тому в більшій мірі задовольняє вимогам, що наприклад висуваються до матеріалів біомедичного призначення.

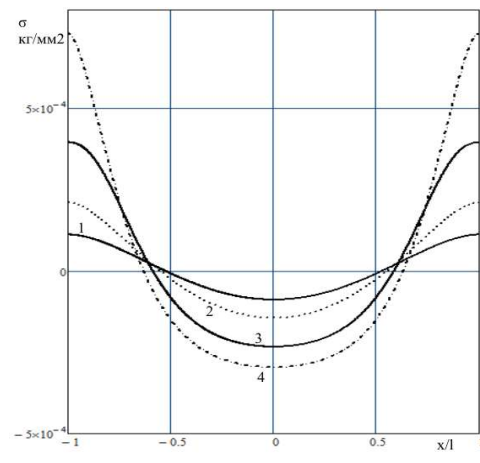


Рисунок 3. Розподіл напружень у шарі для титану

На рис. 3 показано розподіл напружень по товщині вільного від силового навантаження шару, виготовленого з порошкового титану, спеченого при температурі 1473 К.

Пунктирна лінія на цьому рисунку відповідає випадку нехтування залежністю модулів пружності від густини, а суцільна лінія в свою чергу, враховує нелінійну залежність модуля Юнга.

Як видно з графіку, розподіл напружень симетричний за товщиною шару, приповерхневі напруження розтягуючі, у серединній частині шару – стискаючі. Врахування нелінійності модуля Юнга призводить до суттєвого зменшення поверхневих напружень порівняно із випадком сталого модуля, що ілюструє вплив нелінійності моделі. У цілому, врахування залежності локальних модулів пружності від густини призводить до зменшення поверхневих напружень.

Висновок. В роботі побудована математична модель, яка описує розмірні ефекти напружень, міцності й ефективних пружних характеристик у вільному електропровідному шарі. Продемонстровано, що у шарі, вільному від зовнішнього силового навантаження, існує ненульовий напружено-деформований стан, наявність якого обумовлена відхиленням густини на поверхні тіла від густини безмежно неоднорідного середовища. Також виявлено, що міцність тонких плівок зростає зі зменшенням її товщини розміру тіла.

Список використаних літературних джерел

- [1] Nahirnyj T., Tchervinka K. Mathematical modeling of the coupled processes in nanoporous bodies // Acta Mechanica et Automatica. – 2018. – vol.12 no. 3. – P.196-203. DOI 10.2478/ama-2018-0030.
- [2] Markovych B., Senyk Y., Nodzhak L. Stress-deformed state and strength of a locally heterogeneous electrically conductive layer. Mathematical Modeling and Computing. 2022. Vol. 9, No. 3. P. 750–756. <https://doi.org/10.23939/mmc2022.03.750>
- [3] Nahirnyi, T.S., Tchervinka, K.A. & Senyk, Y.A. Strength of a Conducting Nonferromagnetic Layer. Size Effect. J Math Sci 265, 489–497 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06066-6>

A mathematical model of the influence of dimensional effects on the effective modulus of elasticity of thin films

Veronica Shvets, Yuliya Senyk

A mathematical model is proposed and a numerical study of dimensional effects arising in small-sized bodies and related strength issues is carried out. The es-

sential dependence of the elastic properties on the heterogeneity of the body material was assumed and this was reflected by taking into account the power-law dependence of the elastic characteristics. Features of modeling the dimensional effect of layer strength and the dimensional effect of effective modulus of elasticity are considered. With the use of applied packages of computer mathematics, a visualization of the results of the conducted research is presented.