

## Олександр Кухта, Ігор Пірко\*

<sup>1</sup> аспірант, кафедра комп'ютерних наук, Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна, kukhta.o@nltu.lviv.ua

<sup>2</sup> канд. фіз.-мат. наук, доцент, кафедра комп'ютерних наук, Національний лісотехнічний університет України, м. Львів, Україна <https://orcid.org/0009-0008-2378-2929>. pirko@nltu.edu.ua

### Математична модель динамічного ієрархічного пошуку шляху з використанням алгоритму $\theta^*$ для оптимізації локальних обчислень

**Анотація.** Розроблена модель має на меті підвищення ефективності пошуку шляхів у ситуаціях, де середовище підлягає частим змінам, таким як динамічні перешкоди або зміна конфігурації. Розроблений підхід може бути використаний у різних сферах, враховуючи комп'ютерні ігри та робототехніку, де важливо досягти реалістичних та швидких маршрутів для агентів. Запропонована модель також може служити основою для подальших досліджень у галузі оптимізації навігаційних алгоритмів в умовах зміни середовища.

**Ключові слова** – математична модель, динамічний ієрархічний пошук,  $\theta^*$ , any-angle pathfinding.

Сучасні ігрові середовища часто вимагають ефективних алгоритмів пошуку шляхів, здатних швидко обчислювати траєкторії навіть в умовах динамічних змін. Традиційні підходи, такі як  $A^*$ , зазнають значних обмежень у складних середовищах, особливо коли вони інтегровані в ієрархічні системи. Ієрархічні методи, такі як НРА\* (англ. Hierarchical Pathfinding  $A^*$ ), зменшують обчислювальні витрати завдяки кластеризації та абстрагуванню шляхів на різних рівнях. Однак, хоча такі методи знижують обсяги обчислень, це часто відбувається за рахунок оптимальності в середині кластерів. Через це виникають значні затримки та зростає навантаження на пам'ять при постійних оновленнях у динамічному середовищі, що призводить до неконкурентних рішень на локальному рівні.

Існуючі дослідження показують, що кластерна структура в НРА\* обмежує гнучкість вибору маршрутів, що є критичним для ігрових середовищ із великою кількістю перешкод і швидкими змінами. Наприклад, у межах кожного кластера  $A^*$  застосовується як базовий алгоритм пошуку, що призводить до

значних обчислювальних витрат і надмірного часу виконання у великих кластерах. Отже, актуальним залишається питання пошуку шляхів у середині кластерів, що здатне не тільки підтримувати оптимальність шляху, але й адаптуватися до динамічних змін середовища [1].

Одним із перспективних рішень є застосування алгоритмів "будь-якого кута" (англ. any-angle pathfinding), таких як Theta\*, які дають змогу більш природний і прямий пошук шляхів у межах кластерів, знижуючи довжину шляху та оптимізуючи використання ресурсів. Використання Theta\* у динамічному ієрархічному підході може суттєво зменшити кількість обчислень, необхідних для перерахунку локальних шляхів, і підвищити загальну ефективність, що робить його багатообіцяючим для ігрових систем із частими змінами середовища [2].

Для побудови математичної моделі алгоритму Theta\* з використанням динамічного ієрархічного підходу важливо об'єднати особливості цього алгоритму з принципами ієрархічної кластеризації, щоб забезпечити оптимальність та адаптивність у динамічних середовищах. Ось етапи побудови моделі:

**Визначення структури ієрархії.** У динамічній ієрархічній системі середовище поділяється на кластери, кожен з яких моделюється як граф  $G = (V, E)$ , де  $V$  – множина вузлів (вершин), а  $E$  – множина ребер, які з'єднують ці вузли. Кластери формують більш високий рівень ієрархії, в якій кожен кластер з'єднаний з іншими кластерами через портали – спеціальні вузли, які зв'язують кластери між собою.

$$G_H = (V_H, E_H) \quad (1)$$

де  $G_H$  – граф на верхньому рівні ієрархії,  $V_H$  – множина вузлів-порталів, а  $E_H$  – множина ребер між ними.

**Модель шляху на основі Theta\*.** Алгоритм Theta\* шукає шлях з урахуванням "будь-якого кута", що означає, що він перевіряє можливість руху безпосередньо між двома точками, якщо між ними є пряма видимість. Для кожного поточного вузла  $u$  розглядається можливість переміщення до наступного вузла  $s$  без проміжних вузлів.

Математичне подання прямого руху: відстань прямого руху між двома вузлами  $u$  і  $s$ , де є пряма видимість:

$$d(u, s) = \sqrt{(x_u - x_s)^2 + (y_u - y_s)^2} \quad (2)$$

Оновлення вартості шляху: Алгоритм перевіряє, чи прямий рух  $d(u, s)$  менший за суму рухів через інші вузли. Якщо так, то:

$$g(s) = \min(g(s), g(u) + d(u, s)) \quad (3)$$

де  $g(s)$  - поточна найкоротша відстань до вузла  $s$ .

**Динамічне оновлення ієрархічної моделі.** Коли середовище змінюється (наприклад, з'являються нові перешкоди або змінюються межі кластерів), ієрархічна модель повинна адаптуватися. Для цього перераховуються тільки ті кластери, де відбулися зміни, а зв'язки з іншими кластерами залишаються незмінними.

Перерахунок локальних шляхів: Використовуючи  $\text{Theta}^*$ , алгоритм оновлює шлях у межах зміненого кластера. Це забезпечує мінімізацію кількості обчислень і фокусує їх лише на конкретних ділянках, що знижує загальне навантаження на систему.

Оновлення зв'язків між кластерами: Замість повного перерахунку шляху між усіма кластерами, динамічна модель оновлює тільки зв'язки між зміненими кластерами і сусідніми.

**Цільова функція для оптимізації.** У динамічному ієрархічному підході, який використовує  $\text{Theta}^*$ , метою є мінімізація загальної довжини шляху  $P$ , яка враховує всі кластери:

$$\min P = \sum_{(u,s) \in G} d(u, s) \quad (4)$$

де  $P$  - загальна довжина шляху, яка оптимізується шляхом мінімізації відстаней усередині кластерів (через  $\text{Theta}^*$ ) та між кластерами (через динамічне оновлення).

Висновки. Побудовано модель динамічного ієрархічного пошуку шляху з використанням алгоритму  $\text{Theta}^*$  для локальних обчислень. Модель оптимізує траєкторії, зберігаючи коротші шляхи з прямим рухом, що дає змогу досягти більш реалістичного та плавного пересування агентів у межах кластерів. Завдяки прямій перевірці видимості  $\text{Theta}^*$  зменшує кількість проміжних вузлів що в свою чергу зменшує час обчислень.

## **Список використаних літературних джерел**

- [1] Lawande, S. R., Jasmine, G., Anbarasi, J., & Izhar, L. I. (2022). A Systematic Review and Analysis of Intelligence-Based Pathfinding Algorithms in the Field of Video Games. *Applied Sciences*. 2022, 12(11), 5499. <https://doi.org/10.3390/app12115499>
- [2] Daniel, K., Nash, A., Koenig, S., & Felner, A. (2022). Theta\*: Any-Angle Path Planning on Grids. *Journal Of Artificial Intelligence Research*, Volume 39, 533-579. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1401.3843>

### **Mathematical model of dynamic hierarchical pathfinding using theta\* algorithm for optimizing local computations**

**Kukhta O., Pirko I.**

The developed model aims to improve the efficiency of pathfinding in situations where the environment is subject to frequent changes, such as dynamic obstacles or configuration changes. The developed approach can be used in various fields, including computer games and robotics, where it is important to achieve realistic and fast routes for agents. The proposed model can also serve as a basis for further research in the field of optimization of navigation algorithms in a changing environment.