

Ярема Заячук, Ольга Мокрицька*

¹ Кафедра інженерії програмного забезпечення, Національний лісотехнічний університет, Україна, Львів, вул. Генерала Чупринки, 103,
<https://orcid.org/0009-0003-8700-7773> yarema.zayachuk@nltu.edu.ua

² Кафедра систем автоматизованого проектування, Національний університет «Львівська політехніка», Україна, Львів, вул. С. Бандери 12,
<https://orcid.org/0000-0002-2887-9585> olha.v.mokrytska@lpnu.ua

Застосування методу скінченних елементів для моделювання теплопередачі в багат шарових матеріалах

Анотація. Дослідження присвячено застосуванню методу скінченних елементів (МСЕ) для моделювання теплопередачі в багат шарових матеріалах з фіксованими граничними умовами. Метою роботи є розроблення чисельного підходу для аналізу стаціонарної та нестаціонарної теплопередачі в багат шарових середовищах, що мають різні теплотехнічні властивості. В основі дослідження лежить математична постановка задачі теплопровідності для багат шарових систем, яка містить розв'язок системи рівнянь теплопровідності з різними типами граничних умов.

Ключові слова – метод скінченних елементів (МСЕ), теплопередача, багат шарові матеріали, граничні умови, чисельне моделювання.

Теплопередача в багат шарових середовищах з різними фізичними та теплотехнічними властивостями є важливою проблемою в багатьох інженерних, технологічних та наукових застосуваннях. Це питання стосується багатьох галузей, зокрема будівництва, енергетики, аерокосмічної промисловості, медицини та електроніки. Зокрема, багат шарові матеріали використовуються для теплоізоляції, захисту від високих температур або для керування тепловими потоками в складних системах. В таких випадках важливо точно змоделювати процеси теплопередачі для оцінки ефективності матеріалів і конструкцій, а також для оптимізації їхнього дизайну.

Метод скінченних елементів (МСЕ) є потужним інструментом для чисельного аналізу складних фізичних процесів, враховуючи теплопередачу. Завдяки своїй гнучкості та універсальності, МСЕ дає змогу враховувати складну геометрію об'єктів, нелінійні матеріальні властивості, а також різні типи гранич-

них умов, що є важливим для адекватного моделювання теплопередачі в багат шарових структурах. Цей метод базується на дискретизації просторової області на малих елементах (скінченних елементах)[1], в яких шукається апроксимація розв'язку диференціальних рівнянь, що описують теплові процеси.

У даному дослідженні ми пропонуємо використання методу скінченних елементів для моделювання теплопередачі в багат шарових матеріалах з фіксованими граничними умовами. Основна увага приділена розгляду випадків стаціонарної і нестационарної теплопередачі в багат шарових середовищах, а також оцінці впливу різних граничних умов на температурний розподіл та теплові потоки.

Розглянувши багат шарову систему, що складається з кількох шарів матеріалів, кожен з яких має свої теплотехнічні характеристики: теплопровідність, теплоємність і щільність. Задача теплопередачі в такій системі може бути описана системою рівнянь теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial x} (k(x) \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k(y) \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k(z) \frac{\partial T}{\partial z}) + Q \rho c = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

де T – температура, $k(x, y, z)$ – теплопровідність матеріалу, ρ – щільність, c – питома теплоємність, Q – джерело тепла, а t – час. [2]

Граничні умови можуть бути фіксованими температурними значеннями (перший рід), заданими тепловими потоками (другий рід) або ж умовами конвективного теплообміну з навколишнім середовищем (третій рід).

Для реалізації методу скінченних елементів дискретизуємо розрахункову область на окремі елементи, які можуть мати різну форму: трикутники або чотирикутники в 2D, тетраедри або шестигранники в 3D. В межах кожного елемента функція температури апроксимується базисними функціями, і диференціальні рівняння перетворюються на алгебраїчні, що вирішуються системою лінійних рівнянь. Система рівнянь записується в матричній формі:

$$[K] \{T\} = \{F\}, \quad (2)$$

де $[K]$ – глобальна матриця жорсткості, що визначається матеріальними властивостями і топологією елементів, $\{T\}$ – вектор шуканих температур в вузлах, а $\{F\}$ – вектор зовнішніх впливів [3].

Результати моделювання залежать від кількості та типу скінченних елементів, обраних для дискретизації, а також від граничних умов. Врахування різних граничних умов дає змогу детально аналізувати вплив оточуючого середовища на розподіл температури та теплових потоків у багатошаровій структурі [4].

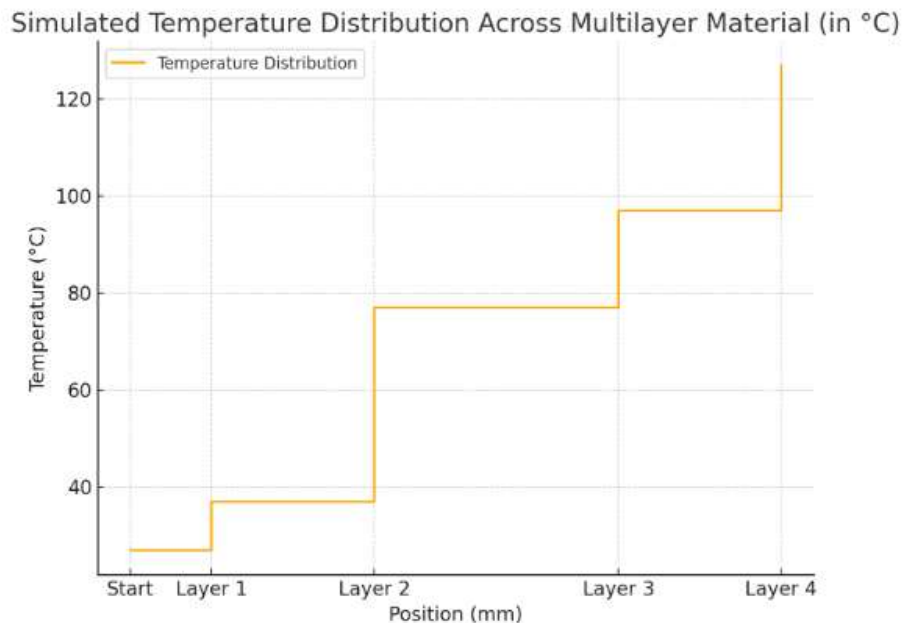


Рисунок 1. Зміна температури для кожного шару матеріалу залежно від його товщини.

Результати чисельного моделювання показують, що метод скінченних елементів ефективно використовується для прогнозування розподілу температур у багатошарових середовищах, що можна побачити на рисунку 1. Було встановлено, що різні типи граничних умов мають суттєвий вплив на результати. Наприклад, при застосуванні умов першого роду (постійна температура) в одному з шарів, температура в інших шарах змінюється залежно від їхніх теплопровідних властивостей [5]. Для умов другого роду (заданий тепловий потік) було виявлено, що нерівномірний розподіл теплових потоків може призвести до утворення температурних градієнтів у середовищі, що важливо враховувати при проектуванні багатошарових матеріалів для теплового захисту.

Висновки. Метод скінченних елементів є потужним та універсальним інструментом для моделювання теплопередачі в багатошарових матеріалах. Він дає змогу не лише враховувати складну геометрію та неоднорідні матеріальні властивості, але й забезпечує гнучкість у виборі та врахуванні різних граничних

умов. Це дає змогу значно підвищити точність чисельних розрахунків та оптимізувати теплотехнічні параметри матеріалів і конструкцій для різних галузей інженерії та науки.

Список використаних літературних джерел

- [1] Fransson, A., & Olofsson, T. (2021). "An Explicit Finite Element Method for Thermal Simulations of Buildings with Phase Change Materials." <https://www.mdpi.com/1996-1073/14/19/6194>
- [2] Han, L., Phatak, K. M., & Liou, F. W. (2004). "Modeling of Laser Cladding with Powder Injection." <https://link.springer.com/article/10.1007/s00170-015-6831-x>
- [3] Duda P., Heat Transfer Coefficient Distribution, A Review of Calculation Methods. *Energies* 2023, p. 16(9) 3683, doi:10.3390/en16093683
- [4] Incropera F.P., DeWitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, vol. 6th. John Wiley & Sons, New York 2007. – p. 1070
- [5] Lu, X., Tervola, P., and Viljanen, M., 2006, «Transient Analytical Solution to Heat Conduction in Composite Circular Cylinder,» *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49 (1-2), pp. 341–348. doi: doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019

Application of the finite element method to simulate heat transfer in multilayer materials

Zaiachuk Yarema, Mokrytska Olha

The research is devoted to the application of the finite element method (FEM) for modeling heat transfer in multilayer materials with fixed boundary conditions. The aim of the study is to develop a numerical approach for analyzing steady-state and unsteady-state heat transfer in multilayer media with different thermal properties. The study is based on the mathematical formulation of the heat transfer problem for multilayer systems, which includes solving a system of heat transfer equations with different types of boundary conditions.